

2 — OPTIQUE DE GAUSS

Les systèmes optiques réalisant le stigmatisme rigoureux ne présentent, on l'a vu, cette propriété que pour un seul couple objet-image (A, A') , sauf dans le cas du miroir plan. Nous allons montrer que, dans certaines conditions d'approximation, *tous* les systèmes optiques présentant un axe de symétrie de révolution réalisent le stigmatisme pour *tous* les points objets, qu'ils appartiennent ou non à cet axe de symétrie : il s'agit des conditions de l'Optique paraxiale ou *Optique de Gauss*.

2.1 – Systèmes centrés

2.1.1 - Axe optique

On dit qu'un système optique est *centré* s'il présente un axe de symétrie de révolution ou *axe optique*; dans toute la suite, un tel axe sera orienté et éventuellement noté (Oz) . On peut alors représenter le système optique dans tout plan méridien; dans la suite, on adoptera le plan (Oxz) pour plan de tracé. L'axe transverse (Ox) ne sera pas forcément représenté à la même échelle que l'axe (Oz) .

Le choix de l'étude de systèmes centrés se justifie par leur commodité de réalisation. De plus, nous ne décrirons dans ce qui suit que des systèmes *sphériques*, les dioptrés et miroirs rencontrés étant des surfaces sphériques séparant des milieux homogènes. Des surfaces plus complexes sont cependant réalisées dans de nombreux systèmes optiques modernes.

2.1.2 - Stigmatisme approché

Considérons le système optique (Σ) centré de la fig. 2.1, et soit A un point objet (non nécessairement réel) appartenant à l'axe optique de (Σ) . Un rayon lumineux arbitraire issu de A en faisant l'angle (orienté) α avec l'axe optique atteint, après traversée du système optique (Σ) , l'axe optique en un point A'_α .

Notons alors $A' = \lim_{\alpha \rightarrow 0} A'_\alpha$; les points A et A' sont uniquement caractérisés par leurs abscisses $z = z_A$ et $z' = z_{A'}$ le long de l'axe optique.

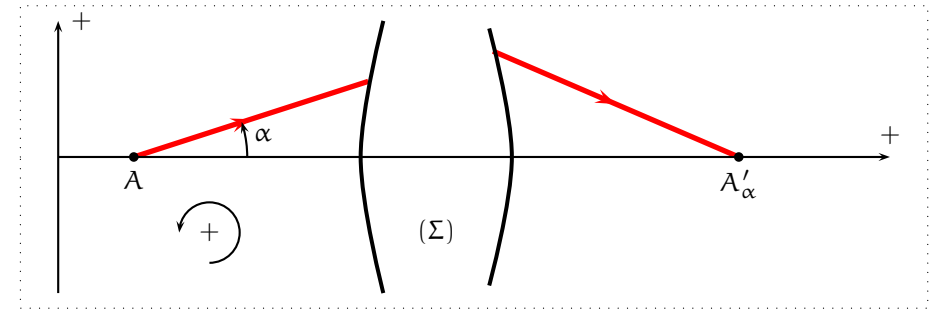


FIG. 2.1 – Stigmatisme approché d'un système centré

Le chemin optique de A à A' est une fonction de α , z et z' seulement, qu'on notera $(AA') = \mathcal{L}_{z,z'}(\alpha)$; pour des raisons de symétrie, c'est une fonction *paire* de α .

Pour des angles α suffisamment faibles, il est possible de proposer un développement limité de $\mathcal{L}_{z,z'}(\alpha)$; ce développement ne contient que des ordres pairs et on l'écrira, au quatrième ordre près, $\mathcal{L}_{z,z'}(\alpha) = \mathcal{L}_0 + k_{z,z'}\alpha^2$.

La condition $k_{z,z'} = 0$, si elle est réalisée, assure la constante du chemin optique, c'est-à-dire le stigmatisme du système pour le couple (A, A') , au quatrième ordre près en α ; on parle alors de *stigmatisme approché*. La relation $k_{z,z'} = 0$ porte le nom de *relation de conjugaison*.

PREMIÈRE CONDITION DE GAUSS

Lorsque les angles formés par les rayons lumineux avec l'axe optique restent faibles, tous les systèmes centrés réalisent (en stigmatisme approché) une image A' de tout point A de l'axe optique.

La relation qui lie les positions de A et A' sur l'axe optique porte le nom de relation de conjugaison.

La limite quantitative à imposer à α dépend de la qualité de l'image attendue; notons

qu'on améliore toujours celle-ci (au prix d'une dégradation de la luminosité) en fermant un diaphragme limitant les angles des rayons lumineux admis. La seule limitation à cette propriété est la diffraction, qui sera décrite ultérieurement.

Les angles α restant faibles, on représente couramment les systèmes optiques au moyen d'une homothétie qui dilate les dimensions transverses; une telle représentation ne conserve pas les angles.

2.1.3 - Condition d'aplanétisme

Considérons un système optique centré, supposé stigmatique pour le couple de points (A, A') de l'axe optique. Pour former des images d'objets étendus, on souhaite qu'un objet B voisin de A forme une image B' voisine de A' , comme sur la fig. 2.2.

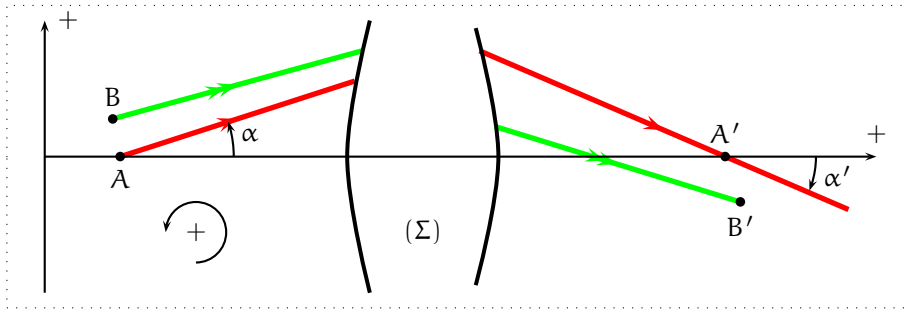


FIG. 2.2 – Aplanétisme approché d'un système centré

Puisque (AA') est une constante indépendante du rayon lumineux choisi, la constante souhaitée de (BB') revient à la constance de $d\mathcal{L} = (BB') - (AA')$, assimilé à une différentielle si AA' et BB' sont assez faibles. Le calcul de $d\mathcal{L}$ a été effectué au chapitre précédent dans le cas où les points extrêmes A et A' étaient fixes, et menait à $d\mathcal{L} = 0$ à cause du principe de Fermat; il suffit donc de rajouter ici les termes supplémentaires aux

extrémités, à savoir $d\mathcal{L} = n'\vec{u}' \cdot \overrightarrow{A'B'} - n\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}$, en notant n et n' les indices des milieux extrêmes et \vec{u} et \vec{u}' les vecteurs unitaires des rayons entrant en sortant du système.

La condition $d\mathcal{L} = \text{Cte}$ prend une forme particulièrement simple dans le cas où on impose à l'objet AB et à son image $A'B'$ d'être *transverses*, c'est-à-dire perpendiculaires à l'axe optique; on dira alors que le système optique est *aplanétique*, formant des images droites dans un plan de front d'objets droits dans un plan de front. On dit alors que ces plans de front (passant par A et A') sont conjugués, comme les points A et A' (ou B et B') sont conjugués.

Dans ce cas, la constante $d\mathcal{L}$ se calcule immédiatement pour un rayon lumineux confondu avec l'axe optique, pour lequel $\vec{u} = \vec{u}' = \vec{u}_z$ puisque chaque élément

de système optique rencontre l'axe optique selon une incidence normale; on a alors $\vec{u}_z \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{u}_z \cdot \overrightarrow{A'B'} = 0$ donc $d\mathcal{L} = 0$ soit encore $n\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = n'\vec{u}' \cdot \overrightarrow{A'B'}$ qui est aussi la *relation des sinus d'Abbe* :

$$n\overline{AB} \sin \alpha = n'\overline{A'B'} \sin \alpha' \quad (2.1)$$

Cette relation définit un *invariant* donné par $n\overline{AB} \sin \alpha$ (ou $n\overline{AB}\alpha$ dans le cas de l'optique paraxiale); il suffit donc qu'un système optique stigmatique soit formé d'éléments individuellement aplanétiques pour qu'il soit globalement aplanétique.

2.1.4 - Aplanétisme des systèmes sphériques

On a vu qu'on se limite à l'étude des systèmes présentant des faces (dioptries et miroirs) sphériques; le centre C d'une de ces faces est forcément situé sur l'axe optique. L'intersection de la sphère étudiée et de l'axe optique porte le nom de *sommet* S ; la fig. 2.3 représente un dioptrite sphérique (avec $n < n'$), stigmatique pour le couple (A, A') .

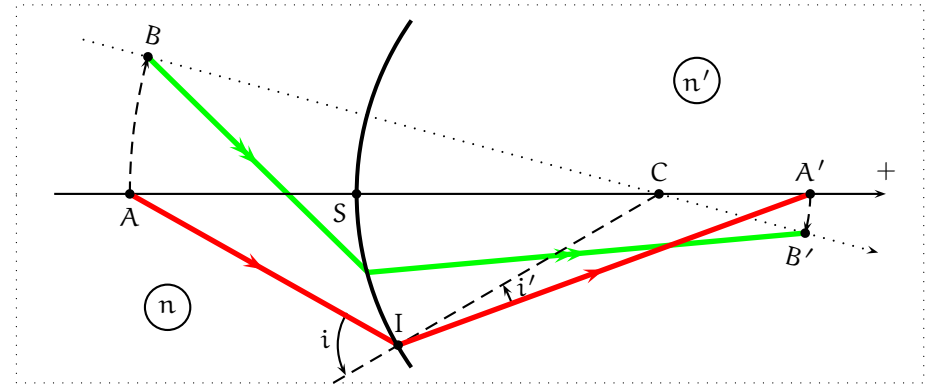


FIG. 2.3 – Aplanétisme d'un dioptrite sphérique

Une rotation arbitraire de l'ensemble amène le point A sur le point B et son image A' est transformée en l'image B' de B . Ainsi l'image de l'arc AB est-elle l'arc $A'B'$; il ne s'agira d'aplanétisme que si on peut confondre ces arcs avec des segments transverses, c'est-à-dire si les dimensions transverses (dont la plus grande est ici SI) restent négligeables devant le rayon de courbure $|SC|$ du dioptrite.

On retiendra donc la condition d'aplanétisme d'un tel système : tous les rayons lumineux doivent atteindre tous les dioptries et miroirs à des distances faibles devant leur rayon de courbure.

2.1.5 - Grandissements

On peut alors vérifier la relation (2.1) d'aplanétisme, qui s'interprète sur la fig. 2.4, tracée avec une homothétie de rapport élevé sur la direction transverse.

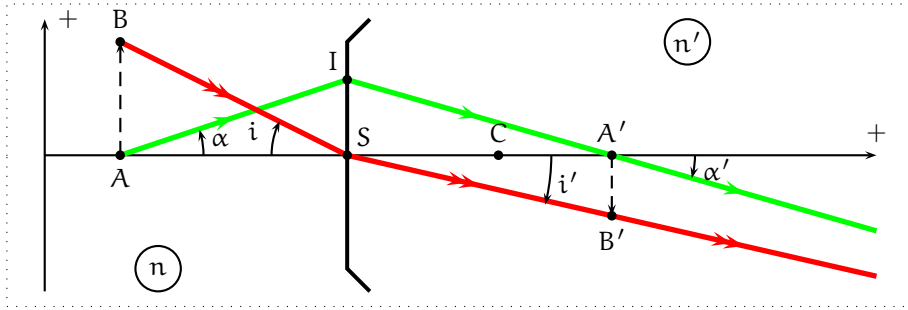


FIG. 2.4 – Grandissements et invariant de Lagrange et Helmholtz

Le rapport des dimensions algébriques de l'image $\overline{A'B'}$ et de l'objet \overline{AB} porte le nom de *grandissement linéaire* (ou *grandissement linéaire transversal*) γ :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad (2.2)$$

et les triangles SAB et SA'B' montrent que $\gamma = \frac{\overline{SA'} \tan i'}{\overline{SA} \tan i}$; d'autre part les lois de Snell-

Descartes imposent, dans les conditions de Gauss, $n i = n' i'$ donc $\gamma = \frac{n \overline{SA'}}{n' \overline{SA}}$.

Le rapport des angles algébriques α d'éclairage en A et α' d'observation en A' porte le nom de *grandissement angulaire* (ou *grossissement*) G :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad (2.3)$$

et il vérifie aussi, dans les triangles SIA et SIA', la relation $G = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}$. On vérifie alors

bien automatiquement que $\frac{n'}{n} \gamma = \frac{1}{G}$, ce qui n'est autre que la relation d'Abbe (2.1) dans le cas particulier des conditions de Gauss ; elle porte alors le nom de *relation de Lagrange et Helmholtz* et s'étend pas associativité à tout système centré à faces sphériques, qui est aussi aplanétique dans les mêmes conditions que celles imposées au dioptré unique étudié :

$$G \gamma = \frac{n}{n'} \quad (2.4)$$

SECONDE CONDITION DE GAUSS

Un système centré à faces sphériques est aplanétique si tous les rayons lumineux atteignent tous les dioptrés et miroirs à des distances faibles devant leur rayon de courbure.

Dans ces conditions, les grandissements linéaire (2.2) et angulaire (2.3) vérifient la relation de Lagrange et Helmholtz (2.4).

2.1.6 - Dimensions d'objets et d'images en Optique

Grandissement linéaire Un système optique fournissant une image à distance finie à partir d'un objet situé également à distance finie (par ex., un vidéoprojecteur, qui forme sur un écran de projection l'image d'un objet formé d'une matrice LCD) est caractérisé, du point de vue de la dimension des images, par la seule donnée du grandissement linéaire γ ; son signe décrit l'inversion éventuelle de l'image et sa valeur absolue l'agrandissement apporté par le système.

Observation à l'infini L'observation d'images à l'infini offre en général l'avantage du confort de vision, l'œil n'ayant pas besoin d'effort musculaire (*l'accommodation*) pour une observation à l'infini. Dans ce cas, la dimension apparente d'un objet (ou de son image) situé à l'infini ne dépend que de l'angle sous lequel cet objet est vu.

On considère par exemple que le *pouvoir de résolution* de l'œil humain moyen est de 1' (une minute d'arc), soit 0,3 mrad : deux objets à l'infini ne seront vus séparément que s'ils sont distants angulairement de plus de 1', ce qui correspond à 0,3 mm à un mètre de distance.

Grandissement angulaire Un système optique fournissant une image située à l'infini d'un objet situé également à l'infini (par ex., une lunette ou un télescope à usage astronomique) est caractérisé, du même point de vue, par la seule donnée du grandissement angulaire G. Ainsi, dans le ciel, les diamètres angulaires de la Lune et du Soleil sont approximativement les mêmes (un demi-degré), ce qui explique la possibilité des éclipses totales du Soleil par la Lune. Là aussi, le signe de G décrit l'inversion éventuelle de l'image et sa valeur absolue l'agrandissement apporté par le système.

Dans le cas fréquent où $n = n'$, si $|G| > 1$, $|\gamma| < 1$: l'image semble plus grande car, de plus petite taille que l'objet, elle est située plus près de l'observateur.

Focale Considérons maintenant un système réalisant une image à distance finie d'un objet situé à l'infini (par ex. dans la photographie de paysages ou d'objets astronomiques). La dimension $\overline{A'B'}$ de l'image ne dépend que de celle α de l'objet ; on définit

alors la grandeur $f' = \frac{\overline{A'B'}}{\alpha}$ qui porte le nom de *focale image* du système étudié.

On peut caractériser un tel système par sa focale f' ou par son inverse, la vergence $V = \frac{1}{f'}$; dans le cadre de l'optique, l'unité m^{-1} porte le nom de dioptrie (symbole δ).

Puissance Considérons enfin un système réalisant une image à l'infini d'un objet situé à distance finie (par ex. un microscope). La dimension angulaire α' de l'image ne dépend que de la dimension linéaire \overline{AB} de l'objet et on définit logiquement la grandeur $\mathcal{P} = \frac{\alpha'}{\overline{AB}}$ qui porte le nom de *puissance* du système étudié. La puissance se mesure en dioptries.

2.2 – Dioptries, lentilles et miroirs sphériques

2.2.1 - Dioptries sphériques

Un dioptre sphérique est représenté sur la fig. 2.5; choisissant l'origine des axes au sommet S , les abscisses de A et A' seront notées $p = \overline{SA}$ et $p' = \overline{SA'}$. Les coordonnées de S , C et I sont enfin $(0,0)$, $(R = \overline{SC}, 0)$ et (z, x) , avec la relation $(z - R)^2 + x^2 = R^2$ qui s'écrit aussi $x^2 = 2Rz$ au second ordre près en z , donc au quatrième ordre près en x , ce qui exactement le cadre de l'approximation de Gauss pour le calcul du chemin optique (AA'), puisque $\alpha = x/p$, x et α étant donc des infiniment petits de même ordre.

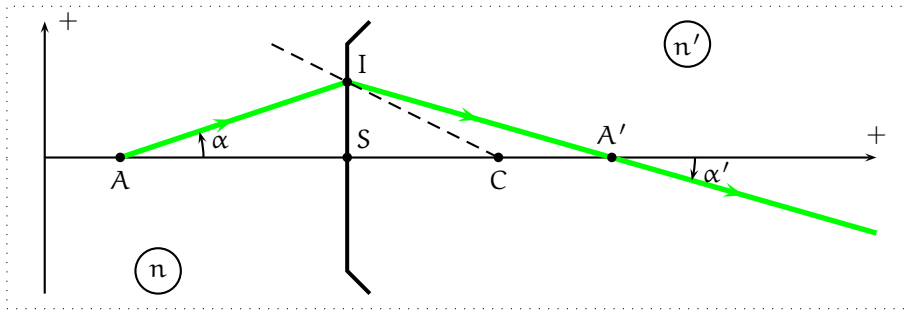


FIG. 2.5 – Conjugaison et grandissement pour un dioptre sphérique

On peut alors écrire le chemin optique (AA') sous la forme $\mathcal{L}(x) = n\overline{AI} + n'\overline{IA'}$ avec $AI = \sqrt{(p-z)^2 + x^2} \simeq \sqrt{p^2 + x^2(1 - p/R)}$ donc $\overline{AI} \simeq -p \left(1 + \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{R} \right] \right)$; de la même façon, on trouve $\overline{IA'} \simeq +p' \left(1 + \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{p'} - \frac{1}{R} \right] \right)$ au même ordre d'approximation,

et on peut écrire $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0 + k_{p,p'}x^2$ où la relation de conjugaison $k_{p,p'} = 0$ s'écrit aussi $n \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{R} \right] = n' \left[\frac{1}{p'} - \frac{1}{R} \right]$, ou encore :

$$-\frac{n}{\overline{SA}} + \frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{-n + n'}{\overline{SC}} \quad (2.5)$$

La figure 2.5 permet de retrouver immédiatement une relation de grandissement, avec $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{p}{p'}$; la relation de Lagrange et Helmholtz (2.4) permet de retrouver l'autre relation :

$$G = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} \quad \gamma = \frac{n\overline{SA'}}{n'\overline{SA}} \quad (2.6)$$

2.2.2 - Lentilles sphériques minces

Une lentille mince est formée (cf. fig. 2.6) de deux dioptries sphériques (faces convexes de la lentille sur la figure) limitant un milieu d'indice $n > 1$ placé dans l'air, assimilé optiquement au vide ($n = 1$).

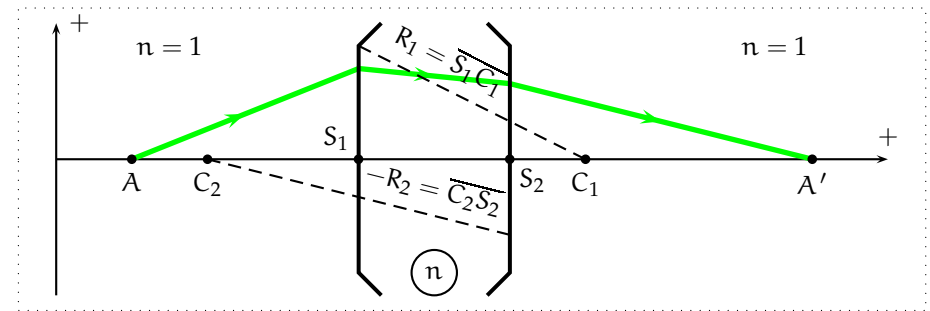


FIG. 2.6 – Conjugaison et grandissement pour une lentille mince

Les réfractions successives par les dioptries d'entrée (sommet S_1 , centre C_1) et de sortie (sommet S_2 , centre C_2) de la lentille permettent d'associer l'objet A , l'image intermédiaire A_i et l'image finale A' selon $-\frac{1}{\overline{S_1A}} + \frac{n}{\overline{S_1A_i}} = \frac{-1+n}{R_1}$ et $-\frac{n}{\overline{S_2A_i}} + \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{-n+1}{R_2}$.

La lentille est dite *mince* si $S_1S_2 \ll |R_1|$ et $|R_2|$; on peut alors assimiler les deux sommets S_1 et S_2 en un point unique O et écrire la relation de conjugaison par la lentille ainsi formée, dont on définit au passage la vergence V :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = V \quad V = (n-1) \left(\frac{1}{\overline{S_1C_1}} - \frac{1}{\overline{S_2C_2}} \right) \quad (2.7)$$

Cette lentille a alors un foyer objet F (dont l'image est à l'infini) et un foyer image F' (image d'un objet à l'infini) caractérisés par les distances focale objet $f = \overline{OF}$ et image $f' = \overline{OF'}$, avec $-f = f' = \frac{1}{V}$. La lentille est convergente (et $V > 0$) si $\frac{1}{S_1C_1} > \frac{1}{S_2C_2}$, donc si la lentille est à bords plus minces que le centre.

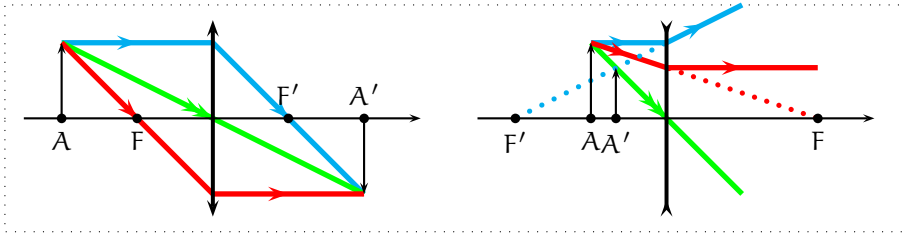


FIG. 2.7 – Tracés de rayons lumineux à travers une lentille mince

La fig. 2.7 rappelle quelques méthodes de tracé classiques pour les lentilles convergentes et divergentes. On peut retrouver sur ces tracés les relations de grandissement, qu'on obtient aussi en composant deux relations de grandissement successives de dioptries sphériques :

$$\gamma = \frac{1}{G} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad (2.8)$$

Cette relation s'écrit aussi $\gamma = 1 - \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$; elle montre que le point $A = O = A'$ est le seul pour lesquels le grandissement linéaire est $\gamma = 1$ (point principal, cf. plus loin) et le grandissement angulaire est $G = 1$ (centre optique de la lentille, $\alpha' = \alpha$).

2.2.3 - Miroirs sphériques

Un miroir sphérique est représenté sur la fig. 2.8; avec la même origine que pour le dioptre sphérique, $p = \overline{SA}$, $p' = \overline{SA'}$ et $R = \overline{SC}$, tandis que les coordonnées de I sont (z, x) , avec $(z - R)^2 + x^2 = R^2$ ou $x^2 = 2Rz$ au quatrième ordre près en x .

On écrit alors $(AA') = \mathcal{L}(x) = \overline{AI} + \overline{IA'}$; le même développement que celui déjà écrit à propos des dioptries sphériques mène à $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0 + k_{p,p'}x^2$ (au quatrième ordre près) avec ici $k_{p,p'} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right)$ d'où la relation de conjugaison $k_{p,p'} = 0$ ou :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad (2.9)$$

On constate immédiatement que les foyers F et F' d'un miroir sont alors confondus au point tel que $1/p = 2/R$: F et F' sont au milieu du segment $[SC]$.

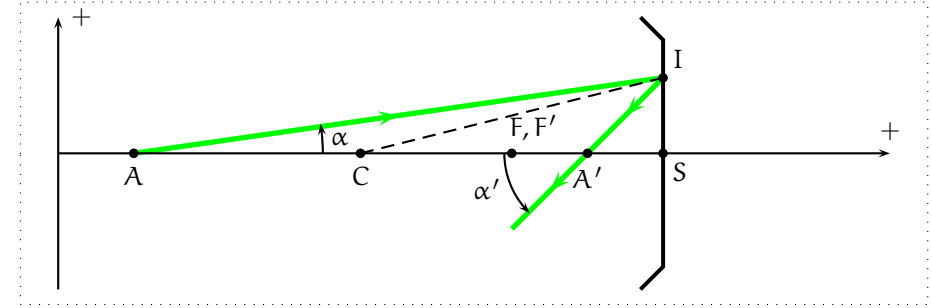


FIG. 2.8 – Conjugaison et grandissement pour un miroir sphérique

La figure 2.5 permet aussi de retrouver une relation de grandissement, avec $\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{p}{p'}$; la relation de Lagrange et Helmholtz permet de retrouver l'autre relation :

$$\gamma = \frac{1}{G} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \quad (2.10)$$

On écrit aussi $\gamma = 1 - \frac{\overline{SA'}}{\overline{SF}}$ et $\gamma = 1$ seulement pour $A = S = A'$.

2.3 – Systèmes centrés quelconques

2.3.1 - Plans principaux des systèmes centrés focaux

Si un système optique centré forme à distance finie une image F' d'un objet à l'infini, il est dit focal; F' est son foyer principal image. Dans le cas contraire, le système est dit afocal. Pour un système focal, un rayon qui émerge parallèlement à l'axe ne peut provenir de l'infini (sinon, le système serait afocal); il provient donc nécessairement d'un point F de l'axe situé à distance finie; F est le foyer principal objet du système.

On peut considérer formellement un foyer objet comme le point objet tel que $\gamma = \infty$, et un foyer image comme le point image tel que $\gamma = 0$. On complète donc logiquement la définition des points principaux d'un système centré en cherchant les couples de points conjugués tels que $\gamma = 1$. On a vu, pour chaque dioptre ou miroir sphérique, que γ peut s'exprimer en fonction seulement de la position de l'image (ou de l'objet); le grandissement apporté par une association de tels systèmes vérifie $\gamma = \prod_{i=1}^N \gamma_i$ et il peut aussi, de

H) sur l'axe optique. La relation $\gamma = 1$ a donc en général une seule solution ; le point objet H et son image H' sur l'axe optique portent le nom de *points principaux* objet et image.

Considérons un système centré focal quelconque (cf. fig. 2.9). Un rayon qui atteint le système parallèlement à l'axe optique émergera en passant par F' ; l'intersection de l'émergent et de l'incident correspond à la seule position possible d'une image ayant même taille que l'objet : cette intersection se fait donc au niveau du *plan principal image*, passant par H'.

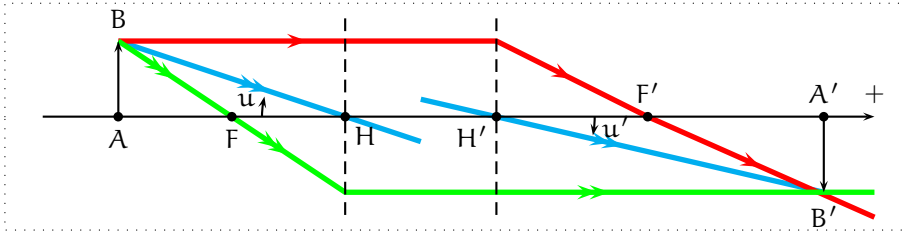


FIG. 2.9 – Système centré focal

De même, sur la fig. 2.9, un rayon qui atteint le système en passant par F en émerge parallèlement à l'axe ; l'intersection de l'émergent et de l'incident correspond à la seule position possible d'un objet ayant même taille que son image et cette intersection se fait donc au niveau du *plan principal objet*, passant par H.

SYSTÈME CENTRÉ FOCAL

Un système centré focal est entièrement caractérisé par la donnée de ses points principaux objet H et image H' (H' est l'image de H) et de ses points focaux objet F (dont l'image est à l'infini) et image F' (image de l'infini).

La construction des quatre points H, H', F et F' exige seulement le tracé de deux rayons, parallèles à l'axe à l'entrée et à la sortie du système optique (cf. fig. 2.9).

2.3.2 - Relations de Newton pour les systèmes focaux

Les deux rayons précédemment décrits permettent d'accéder chacun à une expression du grandissement linéaire, respectivement $\gamma = -\frac{F'A'}{H'F'}$ pour le rayon passant par F' et

$\gamma = -\frac{HF}{FA}$ pour le rayon passant par F.

Avec les notations de Newton, il s'agit des relations de conjugaison et de grandissement universelles :

$$\left. \begin{array}{l} f = \overline{HF} \\ f' = \overline{H'F'} \\ \sigma = \overline{FA} \\ \sigma' = \overline{F'A'} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma = -\frac{f}{\sigma} = -\frac{\sigma'}{f'} \\ \sigma \times \sigma' = f \times f' \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Par ailleurs, un rayon passant par B et H passe aussi par leurs images H' et B' ; ce rayon est caractérisé par le grandissement angulaire $G = \frac{u'}{u}$ et par le grandissement linéaire $\gamma = 1$ (par définition de H et H') donc la relation de Lagrange et Helmholtz impose $\frac{u'}{u} = \frac{n}{n'}$. Enfin, on voit directement sur la fig. 2.9 que $\frac{u'}{u} = \frac{A'B' \overline{HA}}{H'A' \overline{AB}}$, ce qu'on écrit $\frac{n}{n'} = -\frac{f}{\sigma} \frac{\sigma + f}{\sigma' + f'}$ ou, après développement $nf' = -n'\sigma$. Cette relation, établie pour un système dioptrique (ou présentant un nombre pair de miroirs) doit toutefois être changée en son opposé dans le cas des systèmes catadioptriques (présentant un nombre impair de miroirs) à cause du changement de signe de la définition de u' ; on obtient donc :

$$n\overline{HF'} + n'\overline{HF} = 0 \text{ (dioptrique)} \quad \overline{HF} = \overline{H'F'} \text{ (catadioptrique)} \quad (2.12)$$

Comme on l'a vu, pour un dioptre sphérique, $H = H' = S$; pour une lentille sphérique mince, $H = H' = O$, $f' = -f = 1/V$; enfin, pour un miroir sphérique, $H = H' = S$ et $f' = f = R/2$. La plupart des systèmes centrés ne vérifient plus $H = H'$; ils n'ont alors ni lentille ni miroir équivalent.

2.3.3 - Systèmes afocaux

Si les foyers sont rejetés à l'infini, un faisceau parallèle incident sur le système émerge comme un faisceau parallèle (cf. fig. 2.10) et la dimension relative des objet et image ne dépend pas de leur position : γ et G sont des constantes caractéristiques du système. Par contre, il n'existe pas de relation de conjugaison universelle pour les systèmes afocaux.

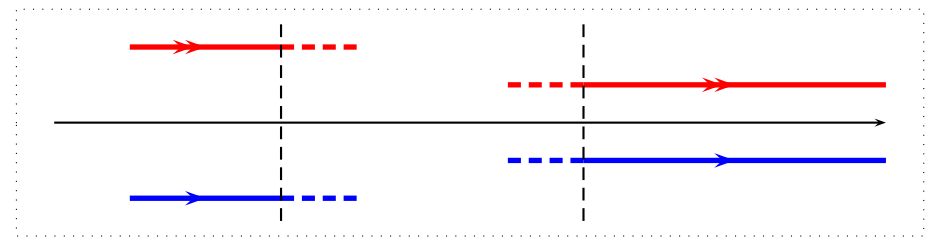


FIG. 2.10 – Système centré afocal (avec $0 < \gamma < 1$)